

УДК 517.5

Е.А. Севостьянов (Житомирский государственный университет им. И. Франко)

Є.О. Севостьянов (Житомирський державний університет ім. І. Франко)

E.A. Sevost'yanov (Zhitomir Ivan Franko State University)

О равностепенной непрерывности отображений с ветвлением в замыкании области

Про одностайну неперервність відображень з розгалуженням в замиканні області

On equicontinuity of mappings with branching in a closure of a domain

В настоящей работе изучаются вопрос о локальном поведении отображений $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, в замыкании области D . При определённых условиях на измеримую функцию $Q(x)$, $Q : D \rightarrow [0, \infty]$, и границы областей D и $D' = f(D)$, показано, что семейство открытых дискретных отображений $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, имеющих характеристику квазиконформности $Q(x)$, равностепенно непрерывно в \overline{D} .

В даній роботі вивчається питання про локальну поведінку відображень $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, в замиканні області D . За певних умов на вимірну функцію $Q(x)$, $Q : D \rightarrow [0, \infty]$, і межі областей D і $D' = f(D)$, показано, що сім'я відкритих дискретних відображень $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, які мають характеристику квазіконформності $Q(x)$, одностайно неперервна в \overline{D} .

In the present paper, questions about a local behavior of mappings $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, in \overline{D} are studied. Under some conditions on a measurable function $Q(x)$, $Q : D \rightarrow [0, \infty]$, and boundaries of D and $D' = f(D)$, we show that a family of open discrete mapping $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, with characteristic of quasiconformality $Q(x)$, is equicontinuous in \overline{D} .

1. Введение. Всюду далее D – область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, m – мера Лебега \mathbb{R}^n , запись $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f , заданное в области D , непрерывно. Запись $\text{dist}(A, B)$ означает евклидово расстояние между множествами A и $B \subset \mathbb{R}^n$. Другие определения и обозначения, встречающиеся в тексте, но не приведённые ниже, могут быть найдены в работе [1] и монографии [2]. Граница ∂D , замыкание \overline{D} области $D \subset \mathbb{R}^n$ (либо области $D \subset \overline{\mathbb{R}^n}$), а также наличие предела для отображения $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ (либо $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$) в дальнейшем будут пониматься в смысле пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$ относительно *хордальной метрики* h , определённой соотношениями

$$h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}, \quad h(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2} \sqrt{1 + |y|^2}}, \quad x \neq \infty \neq y.$$

Хордальным расстоянием $h(A, B)$ между множествами $A, B \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ и хордальным диаметром множества $C \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ называются величины

$$h(A, B) := \inf_{x \in A, y \in B} h(x, y), \quad h(C) := \sup_{x, y \in C} h(x, y),$$

соответственно.

В сравнительно недавней работе [3] нами было установлено свойство равностепенной непрерывности одного семейства пространственных отображений с неограниченной характеристикой в предположении, что все отображения рассматриваемого класса являются гомеоморфизмами. Здесь речь идёт о равностепенной непрерывности в замыкании \overline{D} области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, а не только во внутренних точках. По этому поводу см. также классический результат Някки и Палка для квазиконформных отображений (см. [4]). В настоящей заметке будет показано, что предположение гомеоморфности отображений в [3] может быть ослаблено до условий открытости и дискретности, при этом, здесь необходимо требовать условие замкнутости, эквивалентное свойству сохранения границы (см. [5, теорема 3.3]; см. также [6]), а также и ещё одно условие, заключающееся в следующем: существует континуум $K \subset D' = f(D)$, такой что $h(f^{-1}(K), \partial D) \geq \delta > 0$ для некоторого $\delta > 0$ и всех отображений f из рассматриваемого семейства.

Приведём теперь некоторые вспомогательные сведения, включая формулировку основных результатов. Пусть $E, F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ – произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E, F, D)$ семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D , т.е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$. Здесь и далее

$$A(x_0, r_1, r_2) := \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}. \quad (1)$$

Введём в рассмотрение следующее понятие, см. [2, разд. 7.6 гл. 7]. Пусть $p \geq 1$ и $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция, $Q(x) \equiv 0$ при всех $x \notin D$. Говорят, что отображение $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ есть *кольцевое Q -отображение в точке $x_0 \in \overline{D}$ относительно p -модуля*, $x_0 \neq \infty$, если для некоторого $r_0 = r(x_0)$ и произвольных сферического кольца

(1) и любых континуумов $E_1 \subset \overline{B(x_0, r_1)} \cap D$, $E_2 \subset (\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(x_0, r_2)) \cap D$, отображение f удовлетворяет соотношению

$$M_p(f(\Gamma(E_1, E_2, D))) \leq \int_A Q(x) \cdot \eta^p(|x - x_0|) dm(x) \quad (2)$$

для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$, такой что

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1. \quad (3)$$

В точке $x_0 = \infty$ данное определение может быть переформулировано при помощи инверсии: $\varphi(x) = \frac{x}{|x|^2}$, $\infty \mapsto 0$.

Положим $M(\Gamma) := M_n(\Gamma)$. Отметим, что при $p = n$ и $Q(x) \leq K'$ соотношение (2) влечёт условие $M(f(\Gamma)) \leq K' \cdot M(\Gamma)$ для семейств кривых Γ , соединяющих сферы $S(x_0, r_1)$ и $S(x_0, r_2)$, как только $x_0 \in D$ и $0 < r_1 < r_2 < \text{dist}(x_0, \partial D)$; правда этого, вообще говоря, нельзя сказать относительно любого семейства Γ кривых γ в D . Отметим также, что произвольное отображение f с ограниченным искажением удовлетворяет соотношениям вида (2)–(3) с Q , равным некоторой постоянной. (Этот результат установлен Е.А. Полецким [7]).

Компактное множество $G \subset \mathbb{R}^n$ условимся называть *множеством нулевой ёмкости*, пишем $\text{cap } G = 0$, если существует ограниченное открытое множество $A \subset \mathbb{R}^n$, такое что $M(\Gamma(G, \partial A, A)) = 0$, см., напр., [8, разд. 2, гл. III и предложение 10.2, гл. II]. Будем говорить, что произвольное множество $G \subset \mathbb{R}^n$ имеет ёмкость нуль, если произвольное его компактное подмножество G_0 имеет нулевую ёмкость. Условимся также считать, что произвольное множество $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ имеет ёмкость нуль, если $\text{cap}(G \setminus \{\infty\}) = 0$.

Область D называется *локально связной в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subset U$ точки x_0 такая, что $V \cap D$ связно, см. [9, с. 232]. Будем говорить, что граница ∂D области D *сильно достижима в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется компакт $E \subset D$, окрестность $V \subset U$ точки x_0 и число $\delta > 0$ такие, что $M(\Gamma(E, F, D)) \geq \delta$ для любого континуума F в D , пересекающего ∂U и ∂V , см., напр., [2, разд. 3.8].

Следуя [10, раздел 7.22] будем говорить, что борелева функция $\rho : X \rightarrow [0, \infty]$ является *верхним градиентом* функции $u : X \rightarrow \mathbb{R}$, если для всех спрямляемых кривых γ , соединяющих точки x и $y \in X$, выполняется неравенство $|u(x) - u(y)| \leq \int_{\gamma} \rho |dx|$, где, как обычно, $\int_{\gamma} \rho |dx|$ обозначает линейный интеграл от функции ρ по кривой γ . Будем также говорить, что в указанном пространстве X выполняется *(1; p)-неравенство Пуанкаре*, если найдётся постоянная $C \geq 1$ такая, что для каждого шара $B \subset X$, произвольной ограниченной непрерывной функции $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ и любого её верхнего градиента ρ

выполняется следующее неравенство:

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B |u - u_B| d\mu(x) \leq C \cdot (\text{diam } B) \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B \rho^p d\mu(x) \right)^{1/p},$$

где $u_B := \frac{1}{\mu(B)} \int_B u(x) d\mu(x)$. Метрическое пространство (X, d, μ) назовём *n-регулярным по Альфорсу*, если при каждом $x_0 \in X$, некоторой постоянной $C \geq 1$ и всех $R < \text{diam } X$

$$\frac{1}{C} R^n \leq \mu(B(x_0, R)) \leq C R^n.$$

Замечание 1. Одним из примеров *n-регулярного по Альфорсу* пространства относительно евклидовой метрики и меры Лебега в \mathbb{R}^n , в котором выполнено $(1; p)$ -неравенство Пуанкаре, является единичный шар \mathbb{B}^n , см. [11, предложение 2.1].

Согласно [2, разд. 6.1, гл. 6], будем говорить, что функция $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in D$, пишем $\varphi \in FMO(x_0)$, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon| dm(x) < \infty,$$

где Ω_n – объём единичного шара \mathbb{B}^n в \mathbb{R}^n и $\overline{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{B(x_0, \varepsilon)} \varphi(x) dm(x)$.

Для $p \geq 1$, фиксированных областей $D \subset \mathbb{R}^n$ и $D' \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, континуума $K \subset D'$ и числа $\delta > 0$ обозначим через $\mathfrak{F}_{Q, \delta, K, p}(D, D')$ семейство всех открытых дискретных кольцевых Q -отображений $f : D \rightarrow D'$ относительно p -модуля, таких что $f(D) = D'$, и для которых $h(f^{-1}(K), \partial D) \geq \delta > 0$.

Пусть $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция, тогда $q_{x_0}(r)$ обозначает среднее интегральное значение $Q(x)$ над сферой $|x - x_0| = r$, $q_{x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{|x-x_0|=r} Q(x) dS$, где dS – элемент площади поверхности S . Полагаем

$$q'_b(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{|x-b|=r} Q'(x) dS, \quad Q'(x) = \begin{cases} Q(x), & Q(x) \geq 1, \\ 1, & Q(x) < 1. \end{cases}$$

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. Предположим, область D локально связна в каждой точке $b \in \partial D$, $C(f, \partial D) \subset D'$ для каждого $f \in \mathfrak{F}_{Q, \delta, K, n}(D, D')$, и что область D' имеет сильно достижимую границу. Если функция Q имеет конечное среднее колебание в \overline{D} , либо в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$

$$\int_0^{\delta(x_0)} \frac{dt}{t q'_{x_0} \frac{1}{n-1}(t)} = \infty,$$

то каждое из отображений $f \in \mathfrak{F}_{Q, \delta, K, n}(D, D')$ имеет непрерывное продолжение в \overline{D} . Если, кроме того, $\text{sar}(\mathbb{R}^n \setminus D') > 0$, то семейство $\mathfrak{F}_{Q, \delta, K, n}(D, D')$, состоящее из всех, таким

образом, продолженных отображений $\bar{f} : \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$, является равностепенно непрерывным в \bar{D} .

Теорема 2. Предположим, $n - 1 < p \leq n$, область D локально связна в каждой точке $b \in \partial D$, $C(f, \partial D) \subset D'$ для каждого $f \in \mathfrak{F}_{Q,\delta,K,p}(D, D')$, и что область $D' \subset \mathbb{R}^n$ ограничена и является n -регулярным по Альфорсу пространством относительно евклидовой метрики и меры Лебега в \mathbb{R}^n , в котором выполнено $(1; p)$ -неравенство Пуанкаре. Если функция Q имеет конечное среднее колебание в \bar{D} , либо в каждой точке $x_0 \in \bar{D}$

$$\int_0^{\delta(x_0)} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} = \infty,$$

то каждое из отображений $f \in \mathfrak{F}_{Q,\delta,K,p}(D, D')$ имеет непрерывное продолжение в \bar{D} и семейство $\mathfrak{F}_{Q,\delta,K,p}(D, D')$, состоящее из всех, таким образом, продолженных отображений $\bar{f} : \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$, является равностепенно непрерывным в \bar{D} .

2. Вспомогательные сведения. Справедливо следующее утверждение (см. [12, предложение 4.7]).

Предложение 1. Пусть X — n -регулярное по Альфорсу метрическое пространство с мерой, в котором выполняется $(1; p)$ -неравенство Пуанкаре. Тогда для произвольных континуумов E и F , содержащихся в шаре $B(x_0, R)$, и некоторой постоянной $C > 0$ выполняется неравенство

$$M_p(\Gamma(E, F, X)) \geq \frac{1}{C} \cdot \frac{\min\{\text{diam } E, \text{diam } F\}}{R^{1+p-n}}.$$

Здесь величина $M_p(\Gamma(E, F, X))$ может быть определена по аналогии с евклидовым случаем (см. [12, стр. 610]). Аналог следующего утверждения при $p = n$ установлен в [13, лемма 1]. Однако, ниже мы доказываем это утверждение при несколько иных условиях, связанных с регулярностью по Альфорсу и неравенством типа Пуанкаре.

Лемма 1. Пусть $n - 1 \leq p \leq n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное кольцевое Q -отображение в точке $b \in \partial D$ относительно p -модуля, $f(D) = D'$, область D локально связна в точке b , $C(f, \partial D) \subset \partial D'$, область D' ограничена и является n -регулярным по Альфорсу пространством относительно евклидовой метрики и меры Лебега в \mathbb{R}^n , в котором выполнено $(1; p)$ -неравенство Пуанкаре. Предположим, что найдётся $\varepsilon_0 > 0$ и некоторая неотрицательная измеримая по Лебегу функция $\psi(t)$, $\psi : (0, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$, такая что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt < \infty, \quad I(\varepsilon, \varepsilon_0) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (4)$$

и при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{A(\varepsilon, \varepsilon_0, b)} Q(x) \cdot \psi^p(|x - b|) \, dm(x) = o(I^p(\varepsilon, \varepsilon_0)), \quad (5)$$

где $A := A(\varepsilon, \varepsilon_0, b)$ определено в (1). Тогда $C(f, b) = \{y\}$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся, по крайней мере, две последовательности $x_i, x'_i \in D, i = 1, 2, \dots$, такие, что $x_i \rightarrow b, x'_i \rightarrow b$ при $i \rightarrow \infty$, $f(x_i) \rightarrow y, f(x'_i) \rightarrow y'$ при $i \rightarrow \infty$ и $y' \neq y$. Отметим, что y и $y' \in \partial D'$, поскольку по условию $C(f, \partial D) \subset \partial D'$. Так как область D' ограничена и является n -регулярным по Альфорсу пространством относительно евклидовой метрики и меры Лебега в \mathbb{R}^n , в котором выполнено $(1; p)$ -неравенство Пуанкаре, то ввиду предложения 1

$$M_p(\Gamma(C'_0, F, D')) \geq \frac{1}{C} \cdot \frac{\delta}{R^{1+p-n}} > 0, \quad (6)$$

где $R > 0$ таково, что $D' \subset B(x_0, R)$, x_0 – некоторая фиксированная точка области D' , а F и C'_0 – произвольные фиксированные континуумы в D' , диаметры которых не меньше δ . Поскольку область D локально связна в точке b , можно соединить точки x_i и x'_i кривой γ_i , лежащей в $V \cap D$. Можно также считать, что $|\gamma_i| \in \overline{B(b, 2^{-i})} \cap D$, где $|\gamma_i| := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t : \gamma_i(t) = x\}$. Поскольку $f(x_i) \rightarrow y, f(x'_i) \rightarrow y'$ при $i \rightarrow \infty$ и $y' \neq y$, существует $\delta > 0$ такое, что $\text{diam } |f(\gamma_i)| \geq \delta$ при всех $i \in \mathbb{N}$ (здесь $|f(\gamma_i)| := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t : f(\gamma_i(t)) = x\}$). Пусть C'_0 – произвольный континуум в D' , также имеющий диаметр не меньший δ , тогда ввиду (6)

$$M_p(\Gamma(C'_0, |f(\gamma_i)|, D')) \geq \frac{1}{C} \cdot \frac{\delta}{R^{1+p-n}} \quad (7)$$

при всех $i \in \mathbb{N}$.

Обозначим через Γ_i семейство всех полуоткрытых кривых $\beta_i : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ таких, что $\beta_i(a) \in |f(\gamma_i)|$, $\beta_i(t) \in D'$ при всех $t \in [a, b)$ и, кроме того, $\lim_{t \rightarrow b-0} \beta_i(t) := B_i \in C'_0$. Очевидно, что

$$M_p(\Gamma_i) = M_p(\Gamma(C'_0, |f(\gamma_i)|, D')) . \quad (8)$$

При каждом фиксированном $i \in \mathbb{N}, i \geq i_0$, рассмотрим семейство Γ'_i максимальных поднятий $\alpha_i(t) : [a, c) \rightarrow D$ семейства Γ_i с началом во множестве $|\gamma_i|$. Такое семейство существует и определено корректно ввиду [8, следствие 3.3, гл. II]. Заметим, прежде всего, что никакая кривая $\alpha_i(t) \in \Gamma'_i, \gamma_i : [a, c) \rightarrow D$, не может стремиться к границе области D при $t \rightarrow c - 0$ ввиду условия $C(f, \partial D) \subset \partial D'$. Тогда $C(\alpha_i(t), c) \subset D$. Предположим теперь, что кривая $\alpha_i(t)$ не имеет предела при $t \rightarrow c - 0$. Тогда предельное множество $C(\alpha_i(t), c)$ есть континуум в D . В силу непрерывности отображения f , получаем, что $f \equiv \text{const}$ на $C(\alpha_i(t), c)$, что противоречит предположению о дискретности f .

Следовательно, $\exists \lim_{t \rightarrow c-0} \alpha_i(t) = A_i \in D$. Отметим, что, в этом случае, по определению максимального поднятия, $c = b$. Тогда, с одной стороны, $\lim_{t \rightarrow b-0} \alpha_i(t) := A_i$, а с другой, в силу непрерывности отображения f в D ,

$$f(A_i) = \lim_{t \rightarrow b-0} f(\alpha_i(t)) = \lim_{t \rightarrow b-0} \beta_i(t) = B_i \in C'_0 .$$

Отсюда, по определению C_0 , следует, что $A_i \in C_0$. Погрузим компакт C_0 в некоторый континуум C_1 , всё ещё полностью лежащий в области D , что возможно ввиду [14, лемма 1]. За счёт уменьшения $\varepsilon_0 > 0$, можно снова считать, что $C_1 \cap \overline{B(b, \varepsilon_0)} = \emptyset$. Заметим, что функция

$$\eta(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(2^{-i}, \varepsilon_0), & t \in (2^{-i}, \varepsilon_0), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (2^{-i}, \varepsilon_0), \end{cases}$$

где $I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt$, удовлетворяет условию нормировки вида (3) при $r_1 := 2^{-i}$, $r_2 := \varepsilon_0$, поэтому, в силу определения кольцевого Q -отображения в граничной точке относительно p -модуля, а также ввиду условий (4)–(5),

$$M_p(f(\Gamma'_i)) \leq \Delta(i), \quad (9)$$

где $\Delta(i) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Однако, $\Gamma_i = f(\Gamma'_i)$, поэтому из (9) получим, что при $i \rightarrow \infty$

$$M_p(\Gamma_i) = M_p(f(\Gamma'_i)) \leq \Delta(i) \rightarrow 0. \quad (10)$$

Однако, соотношение (10) вместе с равенством (8) противоречат неравенству (7), что и доказывает лемму. \square

3. Формулировка и доказательство основных лемм. Основным инструментом на пути доказательства теорем 1 и 2 являются следующие два утверждения.

Лемма 2. *Предположим, область D локально связна в каждой точке $b \in \partial D$, $C(f, \partial D) \subset D'$ для каждого $f \in \mathfrak{F}_{Q, \delta, K, n}(D, D')$, а область D' имеет сильно достижимую границу. Предположим также, что для каждой точки $x_0 \in \overline{D}$ найдётся $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0) < \text{dist}(x_0, \partial D)$ и измеримая по Лебегу функция $\psi(t) : (0, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$ со следующим свойством: для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$*

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt < \infty, \quad I(\varepsilon, \varepsilon_0) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (11)$$

и, кроме того, при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} Q(x) \cdot \psi^n(|x - x_0|) dm(x) = o(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)), \quad (12)$$

где, как обычно, сферическое кольцо $A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$ определено как в (1). Тогда каждое отображение $\mathfrak{F}_{Q, \delta, K, n}(D, D')$ продолжается до непрерывного отображения $\bar{f} : \overline{D} \rightarrow \overline{D}'$. Если, кроме того, $\text{sar}(\mathbb{R}^n \setminus D') > 0$, то семейство $\overline{\mathfrak{F}_{Q, \delta, K, n}(D, D')}$ состоящее из всех, таким образом, продолженных отображений $\bar{f} : \overline{D} \rightarrow \overline{D}'$, является равностепенно непрерывным в \overline{D} .

Доказательство. Равностепенная непрерывность внутри области D вытекает из [15, лемма 5.2], а возможность продолжения каждого элемента f семейства отображений $\mathfrak{F}_{Q, \delta, K, n}(D, D')$ до непрерывного отображения в замыкании D — из [13, лемма 1].

Осталось показать, что семейство $\mathfrak{F}_{Q,\delta,K,n}(D, D')$ (обозначения не меняем) равномерно непрерывно в точках ∂D . Предположим противное, тогда найдётся $x_0 \in \partial D$ и число $a > 0$ такое, что для каждого $m = 1, 2, \dots$ существуют точка $x_m \in \overline{D}$ и элемент f_m семейства $\mathfrak{F}_{Q,\delta,K,n}(D, D')$ такие, что $|x_0 - x_m| < 1/m$ и

$$h(f_m(x_m), f_m(x_0)) \geq a. \quad (13)$$

Можно считать, что $x_0 \neq \infty$. В виду возможности непрерывного продолжения каждого f_m на границу D , мы можем считать, что $x_m \in D$.

В силу локальной связности области D в точке x_0 найдётся последовательность окрестностей V_m точки x_0 с $\text{diam } V_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, такие что множества $D \cap V_m$ являются областями и $x_m \in D \cap V_m$. Т.к. граничные точки области, локально связной на границе являются достижимыми из D некоторым локально спрямляемым путём, см. [2, предложение 13.2], мы можем соединить точки x_m и x_0 непрерывной кривой $\gamma_m(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ такой, что $\gamma_m(0) = x_0$, $\gamma_m(1) = x_m$ и $\gamma_m(t) \in V_m$ при $t \in (0, 1)$. Обозначим через C_m образ кривой $\gamma_m(t)$ при отображении f_m . Из соотношения (13) вытекает, что

$$h(C_m) \geq a \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad (14)$$

где h обозначает хордальный диаметр множества. Поскольку f_m сохраняет границу, точка $f_m(x_0)$ принадлежит $\partial D'$. Поскольку $\overline{\mathbb{R}^n}$ компактно, не ограничивая общности можно считать, что последовательность $f_m(x_0)$ сходится к некоторой точке $y_0 \in \partial D'$ при $m \rightarrow \infty$. Заметим, что если E – компакт из определения сильно достижимой границы области D' , то вместо него может быть взят произвольный континуум из D' (см. [3, лемма 4.1]). Таким образом, из определения сильно достижимой границы в точке y_0 , с учётом условия (14) найдётся $b > 0$ такое что

$$M(\Gamma(K, C_m, D')) \geq b \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (15)$$

С другой стороны, рассмотрим теперь семейство Γ_m^1 , состоящее из всех максимальных поднятий $\alpha : [0, c) \rightarrow D$ семейства $\Gamma_m := \Gamma(K, C_m, D')$ при отображении f_m с началом в $|\gamma_m| = \{x \in D : \exists t : \gamma_m(t) = x\}$. Поскольку все отображения f_m являются открытыми и дискретными и, кроме того, $C(f_m, \partial D) \subset \partial D'$ при каждом $m \in \mathbb{N}$, указанное семейство максимальных поднятий существует и $\Gamma_m^1 \subset \Gamma(|\gamma_m|, f_m^{-1}(K), D)$. Согласно сказанному, Поскольку при каждом фиксированном $m \in \mathbb{N}$ множество $|\gamma_m|$ принадлежит окрестности V_m точки x_0 , где $\text{diam } V_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, для последовательности $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ найдётся подпоследовательность номеров m_k , $k = 1, 2, \dots$, таких что $\gamma_{m_k} \subset B(x_0, \frac{1}{2^k})$. Заметим, что ввиду компактности пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$ при каждом фиксированном $\delta > 0$ множество

$$C_\delta := \{x \in D : h(x, \partial D) \geq \delta\}$$

является компактом в D и $f_{m_k}^{-1}(K) \subset C_\delta$ при некотором $\delta > 0$ и всех натуральных k . Ввиду [14, лемма 1] множество C_δ можно вложить в континуум E_δ , лежащий в области

D , при этом, можно считать, что $\text{dist}(x_0, E_\delta) \geq \varepsilon_0$ за счёт уменьшения ε_0 , если это необходимо. Тогда на основании (2) вытекает, что

$$M(f_{m_k}(\Gamma_{m_k}^1)) \leq M(f_{m_k}(\Gamma(|\gamma_{m_k}|, E_\delta, D))) \leq \int_{A(x_0, \frac{1}{2^k}, \varepsilon_0)} Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|) dm(x) \quad (16)$$

для каждой измеримой функции $\eta : (\frac{1}{2^k}, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$, такой что $\int_{\frac{1}{2^k}}^{\varepsilon_0} \eta(r) dr \geq 1$. Заметим, что функция

$$\eta(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(2^{-k}, \varepsilon_0), & t \in (2^{-k}, \varepsilon_0), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (2^{-k}, \varepsilon_0), \end{cases}$$

где $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt$, удовлетворяет условию нормировки вида (3) при $r_1 := 2^{-k}$, $r_2 := \varepsilon_0$, поэтому из условий (16) и (12) вытекает, что

$$M(f_{m_k}(\Gamma_{m_k}^1)) \leq \alpha(2^{-k}) \rightarrow 0 \quad (17)$$

при $k \rightarrow \infty$, где $\alpha(\varepsilon)$ – некоторая неотрицательная функция, стремящаяся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, которая существует ввиду условия (12). Заметим, кроме того, что $f(\Gamma_{m_k}^1) \supset \Gamma_{m_k}$ и, одновременно, $f(\Gamma_{m_k}^1) \subset \Gamma_{m_k}$, так что ввиду [16, теоремы 6.2, 6.4]

$$M(f_{m_k}(\Gamma_{m_k}^1)) = M(\Gamma_{m_k}). \quad (18)$$

Однако, соотношения (17) и (18) в совокупности противоречат (15). Полученное противоречие указывает на то, что исходное предположение (13) было неверным, и, значит, семейство отображений $\mathfrak{F}_{Q,\delta,K,n}(D, D')$ равностепенно непрерывно в каждой точке $x_0 \in \partial D$. \square

Лемма 3. Предположим, $n - 1 < p \leq n$, область D локально связна в каждой точке $b \in \partial D$, а область $D' \subset \mathbb{R}^n$ ограничена и является n -регулярным по Альфорсу пространством относительно евклидовой метрики и меры Лебега в \mathbb{R}^n , в котором выполнено $(1; p)$ -неравенство Пуанкаре. Предположим также, что для каждой точки $x_0 \in \overline{D}$ найдётся $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0) < \text{dist}(x_0, \partial D)$ и измеримая по Лебегу функция $\psi(t) : (0, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$ со следующим свойством: для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt < \infty, \quad I(\varepsilon, \varepsilon_0) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (19)$$

и, кроме того, при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} Q(x) \cdot \psi^p(|x - x_0|) dm(x) = o(I^p(\varepsilon, \varepsilon_0)), \quad (20)$$

где, как обычно, сферическое кольцо $A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$ определено как в (1). Тогда каждое отображение $\mathfrak{F}_{Q,\delta,K,p}(D, D')$ продолжается до непрерывного отображения $\bar{f} : \overline{D} \rightarrow \overline{D'}$ и

семейство $\overline{\mathfrak{F}_{Q,\delta,K,p}(D, D')}$ состоящее из всех, таким образом, продолженных отображений $\bar{f} : \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$, является равностепенно непрерывным в \bar{D} .

Доказательство. Схема доказательства полностью аналогична схеме, изложенной при доказательстве леммы 2, однако, ради полноты изложения мы приведём его полностью. Равностепенная непрерывность внутри области D вытекает из [15, лемма 5.2] при $p = n$ и [17, лемма 3], а возможность продолжения каждого элемента f семейства отображений $\mathfrak{F}_{Q,\delta,K,p}(D, D')$ до непрерывного отображения в замыкании D — из леммы 1.

Осталось показать, что семейство $\mathfrak{F}_{Q,\delta,K,p}(D, D')$ (обозначения не меняем) равностепенно непрерывно в точках ∂D . Предположим противное, тогда найдётся $x_0 \in \partial D$ и число $a > 0$ такое, что для каждого $m = 1, 2, \dots$ существуют точка $x_m \in \bar{D}$ и элемент f_m семейства $\mathfrak{F}_{Q,\delta,K,p}(D, D')$ такие, что $|x_0 - x_m| < 1/m$ и

$$h(f_m(x_m), f_m(x_0)) \geq a. \quad (21)$$

В виду возможности непрерывного продолжения каждого f_m на границу D , мы можем считать, что $x_m \in D$.

В силу локальной связности области D в точке x_0 найдётся последовательность окрестностей V_m точки x_0 с $\text{diam } V_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, такие что множества $D \cap V_m$ являются областями и $x_m \in D \cap V_m$. Т.к. граничные точки области, локально связной на границе являются достижимыми из D некоторым локально спрямляемым путём, см. [2, предложение 13.2], мы можем соединить точки x_m и x_0 непрерывной кривой $\gamma_m(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ такой, что $\gamma_m(0) = x_0$, $\gamma_m(1) = x_m$ и $\gamma_m(t) \in V_m$ при $t \in (0, 1)$. Обозначим через C_m образ кривой $\gamma_m(t)$ при отображении f_m . Из соотношения (13) вытекает, что

$$d(C_m) \geq h(C_m) \geq a \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad (22)$$

где h обозначает хордальный диаметр множества, а d — его евклидов диаметр. Поскольку область D' ограничена, существует шар $B_R = \{x \in D' : |x - \bar{x}_0| < R\}$ с центром в некоторой точке $\bar{x}_0 \in D'$, совпадающий с D' . Тогда из предложения 1 с учётом неравенства (22) следует, что

$$M_p(\Gamma(K, C_m, D')) \geq b \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (23)$$

С другой стороны, рассмотрим теперь семейство Γ_m^1 , состоящее из всех максимальных поднятий $\alpha : [0, c) \rightarrow D$ семейства $\Gamma_m := \Gamma(K, C_m, D')$ при отображении f_m с началом в $|\gamma_m| = \{x \in D : \exists t : \gamma_m(t) = x\}$. Поскольку все отображения f_m являются открытыми и дискретными и, кроме того, $C(f_m, \partial D) \subset \partial D'$ при каждом $m \in \mathbb{N}$, указанное семейство максимальных поднятий существует и $\Gamma_m^1 \subset \Gamma(|\gamma_m|, f_m^{-1}(K), D)$ (см. [8, следствие 3.3, гл. II]). Поскольку при каждом фиксированном $m \in \mathbb{N}$ множество $|\gamma_m|$ принадлежит окрестности V_m точки x_0 , где $\text{diam } V_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, для последовательности $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ найдётся подпоследовательность номеров m_k , $k = 1, 2, \dots$, таких что $\gamma_{m_k} \subset B(x_0, \frac{1}{2^k})$.

Заметим, что ввиду компактности пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$ при каждом фиксированном $\delta > 0$ множество

$$C_\delta := \{x \in D : h(x, \partial D) \geq \delta\}$$

является компактом в D и $f_{m_k}^{-1}(K) \subset C_\delta$ при некотором $\delta > 0$ и всех натуральных k . Ввиду [14, лемма 1] множество C_δ можно вложить в континуум E_δ , лежащий в области D , при этом, можно считать, что $\text{dist}(x_0, E_\delta) \geq \varepsilon_0$ за счёт уменьшения ε_0 , если это необходимо. Тогда на основании (2) вытекает, что

$$M_p(f_{m_k}(\Gamma_{m_k}^1)) \leq M_p(f_{m_k}(\Gamma(|\gamma_{m_k}|, E_\delta, D))) \leq \int_{A(x_0, \frac{1}{2^k}, \varepsilon_0)} Q(x) \cdot \eta^p(|x - x_0|) dm(x) \quad (24)$$

для каждой измеримой функции $\eta : (\frac{1}{2^k}, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$, такой что $\int_{\frac{1}{2^k}}^{\varepsilon_0} \eta(r) dr \geq 1$. Заметим, что функция

$$\eta(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(2^{-k}, \varepsilon_0), & t \in (2^{-k}, \varepsilon_0), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (2^{-k}, \varepsilon_0), \end{cases}$$

где $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt$, удовлетворяет условию нормировки вида (3) при $r_1 := 2^{-k}$, $r_2 := \varepsilon_0$, поэтому из условий (24) и (20) вытекает, что

$$M_p(f_{m_k}(\Gamma_{m_k}^1)) \leq \alpha(2^{-k}) \rightarrow 0 \quad (25)$$

при $k \rightarrow \infty$, где $\alpha(\varepsilon)$ – некоторая неотрицательная функция, стремящаяся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, которая существует ввиду условия (20). Заметим, кроме того, что $f(\Gamma_{m_k}^1) \supset \Gamma_{m_k}$ и, одновременно, $f(\Gamma_{m_k}^1) \subset \Gamma_{m_k}$, так что ввиду [16, теоремы 6.2, 6.4]

$$M_p(f_{m_k}(\Gamma_{m_k}^1)) = M_p(\Gamma_{m_k}). \quad (26)$$

Однако, соотношения (25) и (26) в совокупности противоречат (23). Полученное противоречие указывает на то, что исходное предположение (21) было неверным, и, значит, семейство отображений $\mathfrak{F}_{Q, \delta, K, n}(D, D')$ равностепенно непрерывно в каждой точке $x_0 \in \partial D$. \square

4. Доказательство основных результатов. Утверждение теорем 1 и 2 непосредственно вытекает из доказанных выше лемм 2 и 3 и [18, лемма 3.1 и детали доказательства теоремы 4.2] (см. также [1, лемма 8]). \square

5. Несколько замечаний о точности условий. Ограничимся для простоты случаем $p = n$. Прежде всего заметим, что в лемме 2 и теореме 1 нельзя, вообще говоря, отказаться от условия наличия такого континуума K , что $h(f^{-1}(K), \partial D) \geq \delta > 0$, как показывает простой пример семейства отображений $f(z) = z^n$, $D = B(0, 1) \subset \mathbb{C}$. Здесь указанное семейство отображений является равностепенно непрерывным в D , но не является равностепенно непрерывным в \overline{D} , поскольку оно не является нормальным в

этой замкнутой области. Несколько сложнее построить пример семейства $\{\mathfrak{F}\}$ кольцевых Q -отображений, являющихся открытыми, дискретными, удовлетворяющими условию $C(f, \partial D) \subset \partial D'$ для каждого $f \in \{\mathfrak{F}\}$, удовлетворяющих условию $h(f^{-1}(K), \partial D) \geq \delta > 0$ для некоторого континуума K и числа $\delta > 0$, но при этом не являющегося равномерно непрерывным. Для этого зафиксируем числа $p \geq 1$ и $\alpha \in (0, n/p(n-1))$. Можно считать, что $\alpha < 1$ в силу произвольности выбора p . Зададим последовательность гомеоморфизмов $g_m : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$g_m(x) = \begin{cases} \frac{1+|x|^\alpha}{|x|^\alpha} \cdot x, & 1/m \leq |x| \leq 1, \\ \frac{1+(1/m)^\alpha}{(1/m)^\alpha} \cdot x, & 0 < |x| < 1/m. \end{cases}$$

Покажем, что последовательность g_m удовлетворяет условиям (2)–(3) при некотором $Q(x)$. Заметим, что каждое отображение g_m переводит проколотый шар $D = \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ в кольцо $D' = B(0, 2) \setminus \{0\}$, которое, как известно, имеет сильно достижимую границу, что точка $x_0 = 0$ является устранимой особенностью каждого g_m , $m \in \mathbb{N}$, причём $\lim_{x \rightarrow 0} g_m(x) = 0$, и что последовательность g_m постоянна при $|x| \geq 1/m$, а именно, $g_m(x) \equiv g(x)$ при всех $x : \frac{1}{m} < |x| < 1$, $m = 1, 2, \dots$, где $g(x) = \frac{1+|x|^\alpha}{|x|^\alpha} \cdot x$. Заметим, что $g_m \in ACL(\mathbb{B}^n)$. Действительно, отображения $g_m^{(1)}(x) = \frac{1+(1/m)^\alpha}{(1/m)^\alpha} \cdot x$, $m = 1, 2, \dots$, являются отображениями класса C^1 , скажем, в шаре $B(0, 1/m + \varepsilon)$ при малых $\varepsilon > 0$, а отображения $g_m^{(2)}(x) = \frac{1+|x|^\alpha}{|x|^\alpha} \cdot x$ — отображениями класса C^1 , скажем, в кольце $A(0, 1/m - \varepsilon, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : 1/m - \varepsilon < |x| < 1\}$ при малых $\varepsilon > 0$. Отсюда вытекает, что гомеоморфизмы g_m являются липшицевыми в \mathbb{B}^n и, значит, $g_m \in ACL(\mathbb{B}^n)$, см., напр., [16, разд. 5 на с. 12]. Далее, в каждой регулярной точке $x \in D$ отображения $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ рассмотрим внутреннюю дилатацию отображения f в точке x , определённую равенством

$$K_I(x, f) = \frac{|J(x, f)|}{l(f'(x))^n},$$

где $f'(x)$ — матрица Якоби отображения f в точке x , $J(x, f) = \det f'(x)$ и $l(f'(x)) = \min_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}$. Вычисляя $K_I(x, f)$ для $f := g_m$, можно показать, что

$$K_I(x, g_m) = \begin{cases} \left(\frac{1+|x|^\alpha}{\alpha|x|^\alpha} \right)^{n-1}, & 1/m \leq |x| \leq 1, \\ 1, & 0 < |x| < 1/m, \end{cases}$$

см. [2, предложение 6.3 гл. VI]. Заметим, что при каждом фиксированном $m \in \mathbb{N}$, $K_I(x, g_m) \leq c_m$ при некоторой постоянной $c_m \geq 1$. Значит, $g_m \in W_{loc}^{1,n}(\mathbb{B}^n)$ и $g_m^{-1} \in W_{loc}^{1,n}(B(0, 2))$, поскольку условие $K_I(x, g_m) \leq c_m$ влечёт, что g_m и g_m^{-1} квазиконформны, см., напр., [16, следствие 13.3 и теорема 34.6]. Тогда по [2, теорема 6.1 гл. VI] гомеоморфизмы g_m удовлетворяют в области $D = \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ неравенству вида (2) при $Q = Q_m(x) = K_I(x, g_m)$. Более того, последовательность g_m удовлетворяет неравенству вида (2) при $Q = \left(\frac{1+|x|^\alpha}{\alpha|x|^\alpha} \right)^{n-1}$. Поскольку $\alpha p(n-1) < n$, имеем, что $Q \in L^p(\mathbb{B}^n)$. С другой стороны, легко видеть, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} |g(x)| = 1, \tag{27}$$

и g отображает проколотый шар $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ на кольцо $1 < |y| < 2$. Тогда, в виду (27), мы получаем, что

$$|g_m(x)| = |g(x)| \geq 1 \quad \forall \quad x : |x| \geq 1/m, \quad m = 1, 2, \dots,$$

т.е., семейство $\{g_m\}_{m=1}^\infty$ не является равностепенно непрерывным в нуле. \square

Список литературы

- [1] Севостьянов Е.А. О точках ветвления отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Сиб. матем. ж. – 2010. – **51**, № 5. – С. 1129–1146.
- [2] Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E. Moduli in Modern Mapping Theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
- [3] Севостьянов Е.А. О равностепенной непрерывности гомеоморфизмов с неограниченной характеристикой // Математические труды. – 2012. – **15**, № 1. – С. 178–204.
- [4] Näkki R. and Palka B. Uniform equicontinuity of quasiconformal mappings // Proc. Amer. Math. Soc. – 1973. – **37**, no. 2. – P. 427–433.
- [5] Vuorinen M. Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in n -space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1. Math. Dissertationes. – 1976. – **11**. – P. 1–44.
- [6] Зелинский Ю.Б. Некоторые критерии гомеоморфизма при отображении областей евклидова пространства // Труды VIII летней математической школы. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971. – С. 194–211.
- [7] Полецкий Е.А. Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений // Матем. сб. – 1970. – **83**, № 2. – С. 261–272.
- [8] Rickman S. Quasiregular mappings. – Results in Mathematic and Related Areas (3), 26. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [9] Куратовский К. Топология, Т. 2. – М.: Мир, 1969.
- [10] Heinonen J. Lectures on Analysis on metric spaces. – New York: Springer Science+Business Media, 2001.
- [11] Sevost'yanov E.A. On open and discrete mappings with a modulus condition // Ann. Acad. Sci. Fenn. – 2016. – **41**. – P. 41–50.
- [12] Adamowicz T. and Shanmugalingam N. Non-conformal Loewner type estimates for modulus of curve families // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2010. – **35**. – P. 609–626.
- [13] Севостьянов Е.А. О граничном поведении открытых дискретных отображений с неограниченной характеристикой // Укр. матем. ж. – 2012. – **64**, № 6. – С. 855–859.

- [14] Смолова Е.С. Граничное поведение кольцевых Q -гомеоморфизмов в метрических пространствах // Укр. матем. ж. – 2010. – **62**, № 5. – С. 682–689.
- [15] Севостьянов Е.А. Теория модулей, ёмкостей и нормальные семейства отображений, допускающих ветвление // Украинский матем. вестник. – 2007. – **4**, № 4. – С. 582–604.
- [16] Väisälä J. Lectures on n -Dimensional Quasiconformal Mappings. – Lecture Notes in Math. 229, Berlin etc.: Springer–Verlag, 1971.
- [17] Севостьянов Е.А. О некоторых свойствах обобщённых квазиизометрий с неограниченной характеристикой // Укр. матем. ж. – 2011. – **63**, № 3. – С. 385–398.
- [18] Golberg A., Salimov R. and Sevost'yanov E. Singularities of discrete open mappings with controlled p -module // J. Anal. Math. – 2015. – **127**. – P. 303–328.

КОНТАКТНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Евгений Александрович Севостьянов

Житомирский государственный университет им. И. Франко
 кафедра математического анализа, ул. Большая Бердичевская, 40
 г. Житомир, Украина, 10 008
 тел. +38 066 959 50 34 (моб.), e-mail: esevostyanov2009@mail.ru